

確率数理工学12

再帰性と到達時刻

Def (平均到達時間と平均再帰時間)

$m(i, j) =$ 状態 i から j への平均到達時間

$$\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} k P(T_j = k | X_0 = i) = E[T_j | X_0 = i] \\ \infty \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(if } P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1 \text{)} \\ \text{(otherwise)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \parallel \\ f(i, j) \end{array}$$

($T_j = \inf \{n \geq 1 | X_n = j\}$)

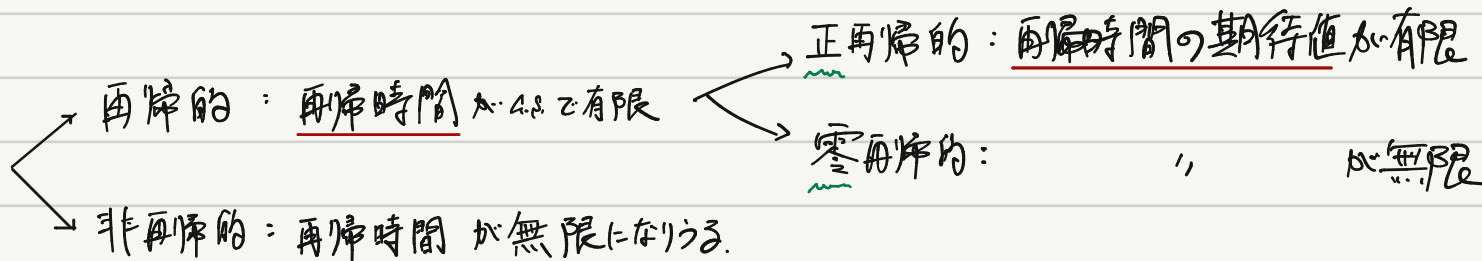
$m(i, i)$ を平均再帰時間 と呼ぶ
↑
同じ

Def (正再帰性)

i : 再帰的とする. 2023. def

$$\left\{ \begin{array}{l} i \text{ が正再帰的} \iff m(i, i) < \infty \\ i \text{ が零再帰的} \iff m(i, i) = \infty \end{array} \right.$$

(非再帰的なら自動的に $m(i, i) = \infty$ である.)



平均到達時間の計算法

$$m(i, j) = p(i, j) \times 1 + \sum_{k \neq j} p(i, k) \left\{ 1 + m(k, j) \right\}$$

\uparrow i から j へ 1 step 2 到達
 \uparrow i から k へ 1 step 2 到達
 \uparrow k から j へ 到達するのに必要 step 数

$$\Rightarrow m(i, j) = 1 + \sum_{k \neq j} p(i, k) m(k, j)$$

$(\because p(i, j) + \sum_{k \neq j} p(i, k) = \sum_{k \in I} p(i, k) = 1)$

この方程式を各 j ごとに解く。

$i = j$ とおけば平均再帰時間も求まる。

解が一意的な場合は最小の非負解 $(m(i, j))$ がとれる。

Ⓧ (証明は与えないが、補足資料の吸収確率の計算と同様に示せる。)

Def (吸収確率)

i : 非再帰的な状態

j : 再帰的な状態 (分解定理判. ある再帰的な既約成分に含まれる)

i から j への 吸収確率 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ i から j を含む再帰的な同値類への到達確率

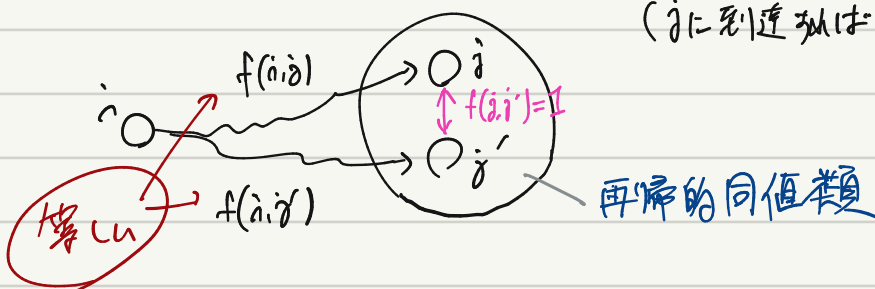
Prop j が再帰的かつ $j \rightarrow j'$ なら $f(j, j') = 1$ である。

Proof 前回の講義資料判. $f(j, j) = 1$ である j が再帰的になることを示せばよい。

よって $j \rightarrow j$ かつ j が再帰的なので、再び同じ議論(25)、 $f(j, j) = 1$ である。

\Rightarrow このことから $\forall j' \in C(j)$ として $f(i, j) = f(i, j')$ がわかる。

(j に到達するには必ず j にも到達し、逆も成り立つ)



⚡ 帰る - 証明

(参考) $\forall k \in C(i) \Rightarrow u_2, f(i, k) = f(i, j) = 1$ の証明

$$f(i, k) = P(T_k < \infty | X_0 = i) \geq \underbrace{P(T_j \leq T_k < \infty | T_j < \infty)}_{\substack{\text{ } \\ \uparrow \text{ } j \text{ を通るから } k \text{ に到達する } p > 0}} P(T_j < \infty | X_0 = i)$$

$$= \underbrace{P(T_k < \infty | X_0 = j)}_{f(j, k) = 1} P(T_j < \infty | X_0 = i) = f(i, j)$$

k と j が逆方向の場合、 $f(i, k) \leq f(j, k)$ も得るので、 $f(i, k) = f(i, j)$

吸収確率の計算方法

$C(i)$: i を含む再帰的な同値類 (閉かつ既約)

T : 非再帰的な元の集合

$$f(i, j) = P(i, j) + \sum_{\substack{k \in C(i) \\ (k \neq j)}} P(i, k) f(k, j) + \sum_{k \in T} P(i, k) f(k, j) + \sum_{k \in I - C(i) - T} P(i, k) f(k, j)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in C(i) & \Rightarrow f(k, j) = 1 \\ k \in I - C(i) - T & \Rightarrow f(k, j) = 0 \end{cases} \quad (\text{分解定理})$$

よって:

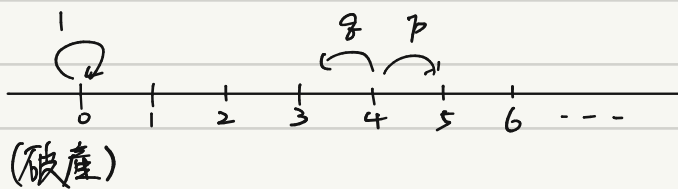
$$f(i, j) = \sum_{k \in C(i)} P(i, k) + \sum_{k \in T} P(i, k) f(k, j)$$

\Rightarrow この方程式を解けば良い。

($\forall j \in C(i)$ について $f(i, j) = f(i, j)$ とおけば良い)

解が一意的な場合は最小の非負解が存在する。

Ex. ギャンブラーの破産確率



確率 p で $+1$ 万円
 q で -1 万円
 所持金 0 で破産

資産 i から始めて破産する確率を求めよ

$a(0) = 1$, $a(i)$: i から始めて破産する確率 ($= f(i, 0)$)

方程式: $a(i) = p a(i+1) + q a(i-1)$ ($i=1, 2, \dots$)

$a(0) = 1$

$\Rightarrow p [a(i+1) - a(i)] = q [a(i) - a(i-1)]$

$\Rightarrow \begin{cases} a(i) = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^i & (p \neq q) \\ a(i) = \alpha + \beta i & (p = q = \frac{1}{2}) \end{cases}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする。

(i) $p < q$ のとき $0 \leq a(i) \leq 1$ ($\forall i$) $\Rightarrow \beta = 0$ (理由は $a(i) \rightarrow \infty$ かつ $a(i) \rightarrow -\infty$)
 $\therefore a(0) = 1$ から $\alpha = 1$ なのだから $a(i) = 1$ ($\forall i$)
 \rightarrow 必ず破産する

(ii) $p = q$ のとき $0 \leq a(i) \leq 1$ ($\forall i$)
 $\Rightarrow \beta = 0$
 $a(0) = 1$ $\Rightarrow \alpha = 1$ $\therefore a(i) = 1$ ($\forall i$)
 \rightarrow 必ず破産する

(iii) $p > q$ のとき $i \rightarrow \infty$ $\therefore a(i) \rightarrow \alpha$ である。
 一方、 $i=0$ $\therefore a(0) = \alpha + \beta = 1$
 \therefore 最小の非負解は $\alpha = 0, \beta = 1$ \therefore 達成される。
 つまり、
 $a(i) = \left(\frac{q}{p}\right)^i$
 \rightarrow 運が良ければ破産しない

Thm (平均再帰時間の性質と正再帰性の条件)

任意の i, j に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^{(k)}(i, j) = \frac{f(i, j)}{m(i, j)}$$

← 到達確率
← 平均再帰時間

特に j が正再帰的 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^{(k)}(j, j) > 0$
 $\forall m(i, j) < \infty$

(証明はCronF)

直感的説明: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^{(k)}(i, j)$ は " i から出発して n ステップ目まで平均的に j に滞在した時間の割合" である。
 \rightarrow 尤も i から j に到達する確率 $f(i, j)$ 、 j に到達したら $m(i, j)$ 時間後に j に戻るので、
 平均的に $\frac{1}{m(i, j)}$ の割合で j に滞在したことになる。 //

Cor I が既約であるとする。

(i) j が正再帰的なら $\forall i \in I$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^{(k)}(i, j) = \frac{1}{m(i, j)} > 0$$

(ii) j が零再帰的なら $\forall i \in I$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(i, j) = 0$$

(\because (i): I が既約である。 j が正再帰的なら $f(i, j) = 1$ であるから示すことができる。
 \therefore (ii) は Thm 1) 示す)

(ii) は自明である。証明は省略。)

(Thmの proof)

$$Z_n = \begin{cases} 1 & (X_n = j) \\ 0 & (X_n \neq j) \end{cases} \text{ とおす。 } N_j(n) = \sum_{k=1}^n Z_k \text{ とおす。}$$

時刻 n まで j にいた回数

$$E[N_j(n) | X_0 = i] = \sum_{k=1}^n E[Z_k | X_0 = i] = \sum_{k=1}^n P^{(k)}(i, j) \text{ (注意する)}$$

(i) 尤も $i = j$ を考える ($X_0 = i = j$)

$T_j^{(k)}$ を状態 j を k 回訪ねる時間とする ($T_j^{(k)} = \inf \{n \geq 1 \mid N_j(n) \geq k\}$)

$T_j^{(0)} = 0$ とおす。

$\therefore i$ が n が無ければ ∞ とおす

$t_k = T_j^{(k)} - T_j^{(k-1)}$ とおす。すると、 t_k は独立同分布に従う。(Markov性)
 よって、大数の強法則より

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} + t_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{a.s.} E[t_1] = E[T_j | X_0 = j] = m(i, j)$$

また、 $T_j^{(k)}$ の定義より $T_j(N_j(n)) \leq n < T_j(N_j(n)+1)$

よって、

$$\frac{T_j(N_j(n))}{N_j(n)} \leq \frac{n}{N_j(n)} < \frac{T_j(N_j(n)+1)}{N_j(n)+1} \cdot \frac{N_j(n)+1}{N_j(n)}$$

$m(i, j) = \infty$ の場合
 (零再帰的でない o.k.)

よって、

(a) $\iff j$ が再帰的であるときと仮定すると $N_j(n) \rightarrow \infty$ (a.s.)

前項資料より、 $m(i, j) = 1$

よって、
$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow m(i, j) \quad (a.s.)$$

(b) 一方、 j が非再帰的ならば $P(\lim_{n \rightarrow \infty} N_j(n) < \infty | X_0 = j) = 1$ となる。
 したがって、

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow \infty \quad (a.s.)$$

よって、一方、 j が非再帰的ならば $m(i, j) = \infty$ であることを示す。

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow m(i, j) \quad (a.s.) \text{ を得る。}$$

(ii) $i \neq j$ のとき、

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \underbrace{\frac{t_1}{k}}_{\frac{T_j}{k}} + \frac{t_2 + \dots + t_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{a.s.} \begin{cases} m(i, j) & (T_j < \infty) \\ \infty & (T_j = \infty) \end{cases}$$

(i), (ii) より、よって、

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow \begin{cases} m(i, j) & (\text{if } T_j < \infty) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (a.s.)$$

$$\Rightarrow \frac{N_j(n)}{n} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{m(i, j)} \mathbb{1}[T_j < \infty] \quad (a.s.)$$

両辺の期待値をとれば. ル1=7の優収束定理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p^{(n)}(i, j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{N_j(n)}{n} \mid X_0 = i \right] \\ &= E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_j(n)}{n} \mid X_0 = i \right] \\ &= E \left[\frac{1}{m(i, j)} \mathbb{1}_{[T_j < \infty]} \mid X_0 = i \right] \\ &= \frac{1}{m(i, j)} \cdot P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = \frac{f(i, j)}{m(j, j)} \quad // \end{aligned}$$

定常分布と極限分布

Def (定常分布)

$\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots) : I$ 上の分布

π が 定常分布 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \pi = \pi P \quad (\pi(j) = \sum_{i \in I} \pi(i) P(i, j))$
: 平衡方程式

* Markov 連鎖で更新しても分布が変わらない

(定常分布が存在するとき限定的)

Def (極限分布)

$\pi_n(j) := \sum_{i \in I} \pi_0(i) P^{(n)}(i, j) \quad (\pi_0 \text{ は初期分布})$

(n ステップ目にとの状態にいつあるかを表した分布)

π が 極限分布 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の π_0 に対し.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(j) = \pi(j) \quad (\forall j \in I)$$

(離散分布なので法則収束)

(極限分布が存在するとき限定的)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{極限分布}$$

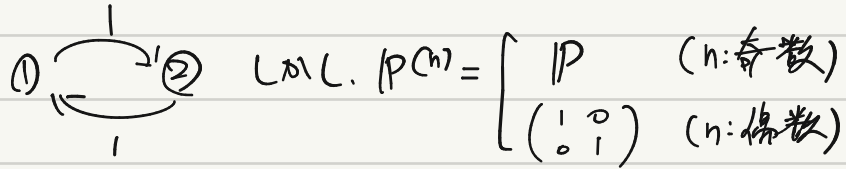
この形式を L と呼ぶことがある.

$\pi(j) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$
と表すこともできる.

Note

- 極限分布が存在すれば、それは一意の定常分布である。
→ チェックせよ。
- 定常分布が存在しても 極限分布が存在するとは限らない。

反例: $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi P = \pi \neq \pi, \pi$ は定常分布



→ 周期性がある

$\pi_0 = (1 \ 0)$ とすると

$$\pi_n = \begin{cases} (0 \ 1) & (n: \text{奇数}) \\ (1 \ 0) & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

→ 収束しない。 極限分布は存在しない。

Thm (ZLZ連鎖の定常分布)

ZLZ連鎖は 既約 であると仮定する。

すると、以下は同値

- (1) ある $j \in I$ が正再帰的
- (2) 全ての $j \in I$ が正再帰的
- (3) 定常分布 π が存在する。

(1), (2) は正再帰性の
2つの性質)

(1), (2), (3) のうち、定常分布は一意に定まる。

$$\pi(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(j, j) = \frac{1}{m(j, j)}$$

で表される。 (j から j に戻ってくるまでの平均時間 $m(j, j) \rightarrow j$ は平均的に $\frac{1}{m(j, j)}$ の割合で滞在)

Len 正再帰的な j に対して、

$$\mu(i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i, T_j > n | X_0 = j)$$

← j を出発して再び j に戻りきるまで i を訪ねる回数

とすると、 $\pi(i) = \frac{\mu(i)}{m(j, j)}$ は定常分布になる。

(I の既約性は仮定して置く。定常分布は一意とは限らない)

($\pi(i)$ は j を出発して j に戻りきるまで、 i を訪ねる回数 $i \in I$ に滞在して置く回数) 表す)

(Lem の Proof) $\mu(j) = P(X_0 = j, T_j > 0 | X_0 = j) = 1$ である。

($P(T_j < \infty | X_0 = j) = 1$ に注意)

$$\begin{aligned} \text{また, } \sum_{i \in I} \mu(i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I} P(X_n = i, T_j > n | X_0 = j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_j > n | X_0 = j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j \geq n | X_0 = j) \\ &= E[T_j | X_0 = j] = m(j, j) \end{aligned}$$

たのび. π は **確率分布** になる.

$\bar{P}^{(k)}(j, i) = P(X_l = i, T_j > l | X_0 = j)$ とおくと. μ の定義より

$$\sum_i \mu(i) p(i, k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) p(i, k)$$

である. 右辺 = $\mu(k)$ なら $\pi(\alpha\mu)$ は **定常分布** になる.

(i) ($k \neq j$ のとき)

$$\begin{aligned} &\sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) p(i, k) \\ &= \sum_i P(X_l = i, T_j > l, X_{l+1} = k | X_0 = j) \\ &= P(T_j > l, X_{l+1} = k | X_0 = j) \\ &= P(T_j > l+1, X_{l+1} = k | X_0 = j) \quad (\because j \neq k) \\ &= \bar{P}^{(k+1)}(j, k) \end{aligned}$$

である. $\sum_{l=0}^{\infty} (\text{右辺}) = \mu(k)$ となる. ($j \neq k$ に注意)

(ii) ($k = j$ のとき)

上と同様に

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) p(i, k) &= \sum_i P(X_l = i, T_j > l, X_{l+1} = \overset{k}{j} | X_0 = j) \\ &= P(T_j = l+1 | X_0 = j) \end{aligned}$$

である.

$$\sum_{l=0}^{\infty} (\text{右辺}) = P(T_j < \infty | X_0 = j) = 1 = \mu(j)$$

(Proof of Thm)

(2) \rightarrow (1) は明らか.

(1) \rightarrow (2)

$i \in I$ を任意に取る. $j \in I$ は正再帰的 Σ 状態と仮定.

既約性より, $i \leftrightarrow j$ である.

よって, $\exists k, m \in \mathbb{N}$ として $P^{(k)}(i, j) > 0, P^{(m)}(j, i) > 0$ である.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(i, i)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(i, i) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m+k} \sum_{l=1}^n \underbrace{P^{(k)}(i, j)}_{>0} P^{(l)}(j, j) \underbrace{P^{(m)}(j, i)}_{>0} \\ &= \frac{P^{(k)}(i, j)}{>0} \frac{P^{(m)}(j, i)}{>0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m+k} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(j, j) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{m(j, j)} > 0$

($\because j$ は正再帰的.

m の性質より)

より i は正再帰的.

(2) \rightarrow (3) $\forall \lambda$ が正再帰的ならば, 直前の Lem より
ある定常分布が存在する.

(3) \rightarrow (2)

既約性より, 定常分布 π (=対し, $\pi(j) > 0$ なる $j \in I$) がある.

$\forall i \in I$ として $j \rightarrow i$ である. よって, ある $n \in \mathbb{N}$ として $P^{(n)}(j, i) > 0$

とできる. よって

$$\pi(i) = \sum_{j'} \pi(j') P^{(n)}(j', i) \geq \pi(j) P^{(n)}(j, i) > 0$$

となる. 一方, $\forall j \in I$ である

$$\pi(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{k \in I} \pi(k) P^{(k)}(k, j) \right)$$

($\because \pi = \pi(j), \pi$ は定常分布なので)

$$= \sum_{k \in I} \pi(k) \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(k, j) \right)$$

$n \rightarrow \infty$
↓
優収束
定理

$$\sum_{k \in I} \pi(k) \frac{f(k, j)}{m(j, j)}$$

これと $\pi(i) > 0$ を合わせると、 $\frac{1}{m(i,i)} > 0$ である。

よって、 $m(i,i) < \infty$ 、つまり i は正再帰的。特に i は再帰的。

既約性と再帰性より、 $f(i,i) = 1$ (必ず) となり、 $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$ が成り立つ。

(一意性) 上の議論で、 $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$ が $\frac{1}{\sum_j \pi(j)}$ (つまり 1) ので、一意性も示すことができる。

Def (周期性)

i の周期 $d(i) = p^{(n)}(i,i) > 0$ なる $n \geq 1$ の最大公約数

Lem

$i \leftrightarrow j$ なら $d(i) = d(j)$ (周期はクラスの性質)

Thm (極限分布の存在条件)

マルコフ連鎖が既約であること。

連鎖が $\begin{cases} \text{正再帰的} \\ \text{非周期的} \end{cases} \iff \underline{\text{極限分布が存在}}$

Note この極限分布は定常分布で $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$ である。

正再帰的なら定常分布が存在。

Lem 既約で正再帰的なマルコフ連鎖が非周期的なら $\forall i, j \in I$ で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i,j) = \frac{1}{m(i,i)} = \pi(i) \text{ (定常分布)}$$

周期的 ($d(i) \geq 2$) なら、 $p^{(n)}(i,j)$ は収束しない。

(証明は、セージの法による。補足資料を参照のこと)

(Proof of Thm)

(\Rightarrow) Lem 12 対.

(\Leftarrow) 極限分布が存在すれば、定常分布が存在するので、正再帰的.

また、先の Lem 11) 周期的なら $p^{(n)}(i, i)$ は収束せず.

極限分布が存在しなくなるので、非周期的でなくともよい.

Thm (大数の強法則)

既約かつ定常分布 π が存在すると、(極限分布の存在は仮定しない)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ かつ $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |f(i)| \pi(i) < \infty$ (つまり $E_{i \sim \pi}[|f(i)|] < \infty$)
可積分

なら、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow{\text{a.s.}} E_{\pi}[f(X)] \quad (4.8)$$

↑
Z(1)連鎖

* 大数の強法則により、MCMC法が正当化される.